

Для неинерциальной системы отсчета уравнение движения материальной точки под действием силы отличается от уравнения движения относительно инерциальных систем отсчета. Согласно (3), оно имеет форму

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k. \quad (8)$$

Наличие поправок на неинерциальность систем отсчета в виде сил инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ позволяет установить неинерциальность системы отсчета и отличить эти системы отсчета одну от другой.

Система отсчета, скрепленная с земным шаром, не является инерциальной. Земной шар движется относительно гелиоцентрической инерциальной системы отсчета. При рассмотрении движения материальных тел относительно Земли должны проявлять себя эффекты, связанные с неинерциальностью системы отсчета. Земной шар движется относительно гелиоцентрической системы отсчета как свободное твердое тело. Его центр перемещается по эллиптической орбите, близкой к окружности. Кроме того, он вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с почти постоянной по модулю и направленной угловой скоростью, совершая один оборот за сутки. Угловая скорость вращения Земли

$$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) \approx 0,00007 \text{ с}^{-1},$$

т. е. величина малая по сравнению с единицей.

В общем случае переносная сила инерции

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m[\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})],$$

где $\bar{a}_0$ — ускорение центра земного шара относительно гелиоцентрической системы отсчета; $\bar{r}$ — радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра Земли. Ускорение $\bar{a}_0$ с очень большой степенью точности можно считать равным нулю, так как центр Земли движется по эллиптической орбите очень

264

больших размеров. Угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ можно тоже считать равным нулю, так как $\bar{\omega}$ считаем постоянным вектором. Оставшаяся часть переносного ускорения $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ пропорциональна ω^2 , т. е. величина малая по сравнению с величинами порядка ω для не очень больших расстояний r . Величиной порядка ω является сила инерции Кориолиса

$$\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k = -m \cdot 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r),$$

где $\bar{v}_r$ — скорость материальной точки относительно Земли.

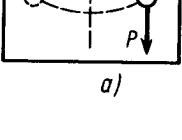
Таким образом, неинерциальность систем отсчета, скрепленной с Землей, проявляется главным образом через влияние

сил инерции Кориолиса, если рассматривается движение материальной точки вблизи Земли, при котором r не очень

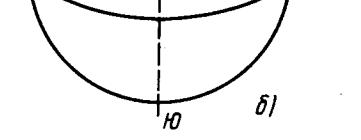
велико. Рассмотрим несколько примеров этого влияния кориолисовой силы инерции.

Маятник Фуко. Если подвесить на длинной нити груз достаточно малых размеров, то действующая на него сила $\bar{F}$ будет состоять из силы притяжения $\bar{P}$ к Земле, направленной к центру Земли, и силы натяжения нити $\bar{S}$ (рис. 16, а). Эти силы расположены в одной вертикальной плоскости π (рис. 16, б). Если начальные отклонения и скорость груза тоже находятся в плоскости π , то маятник при колебаниях должен все время находиться в плоскости π , неподвижной относительно гелиоцентрической системы отсчета. Земной шар поворачивается относительно этой системы отсчета с угловой скоростью ω . Следовательно, плоскость π по отношению к Земле должна поворачиваться в сторону, противоположную Земле, с угловой скоростью ω , если маятник подвесить на северном полюсе. Для маятника на широте φ угловая скорость вращения плоскости колебаний маятника равна $\omega \sin \varphi$. На экваторе эта скорость равна нулю.

Если тело маятника имеет выступ, который при колебаниях может оставлять след, например на песке, то этот след при



а/



б/

Рис. 16



Рис. 17

движении маятника в одну сторону будет отличаться от следа при движении в противоположную сторону из-за вращения Земли. Это отличие тем больше, чем длиннее нить маятника. Фуко в 1857 г. использовал маятник длиной $l=67$ м. В СССР маятник Фуко имеется в Исаакиевском соборе в Ленинграде. Маятник Фуко наглядно демонстрирует вращение Земли относительно инерциальной системы отсчета.

Отклонение движущихся тел вправо в Северном полушарии. В Северном

полушарии из-за дополнительного действия силы инерции Кориолиса, вызванной вращением Земли, все движущиеся тела должны смещаться в правую сторону, если смотреть в направлении движения. Пусть материальная точка движется со скоростью $\bar{v}_r$ относительно Земли по касательной к меридиану с севера на юг (рис. 17). Определим проекцию $\bar{v}_r^*$ этой скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения Земли. Повернув вектор $\bar{v}_r^*$ вокруг оси, параллельной оси вращения земного шара, на 90° в направлении его вращения, получим, согласно правилу Жуковского, направление ускорения Кориолиса $\bar{a}_k$ по касательной к параллели с запада на восток. Сила инерции Кориолиса $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$ соответственно направлена с востока на запад, т. е. вправо от направления движения. Действие такой силы вызовет у движущейся точки дополнительное ускорение относительно Земли в направлении этой силы, а следовательно, и ее перемещение, если точка движется в течение некоторого времени. Движение точки может иметь направление, отличное от касательной к меридиану. Важно, чтобы оно имело отличную от нуля проекцию скорости $\bar{v}_r^*$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения земного шара.

Если рассмотреть поступательное движение железнодорожного вагона, то для него сила инерции Кориолиса пройдет через центр его тяжести слева направо, если смотреть по движению вагона. Это приведет к увеличению давления на правый рельс и к его уменьшению на левый. На двухколейных железных дорогах правый рельс изнашивается быстрее левого.

Для частички воды в реке действие силы Кориолиса слева направо, если смотреть по течению реки, приведет к прижиманию этой частички к правому берегу, способствуя большему его подмыванию. Правый берег рек в Северном полушарии более подмыт, чем левый на прямолинейных участках реки. Этот эффект известен в географии как закон Бэра. На закруглениях реки вследствие центростремительных сил инерции может оказаться подмытым и левый берег.

Действие силы инерции Кориолиса на летящие самолеты, ракеты, снаряды, движущийся воздух, морские течения приво-

266

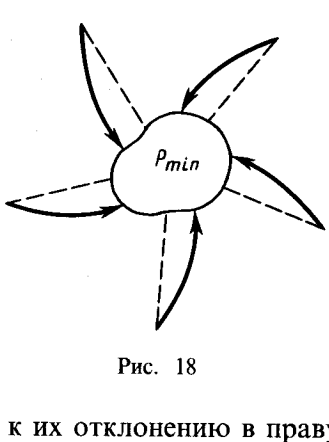


Рис. 18

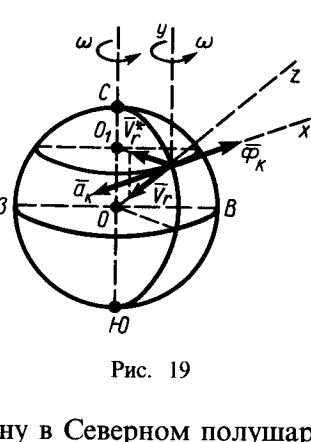


Рис. 19

дит к их отклонению в правую сторону в Северном полушарии. В Южном полушарии отклонение будет в левую сторону. Сила инерции Кориолиса способствует образованию циклонов, антициклонов, вихрей, смерчей и т. д. Если в каком-то месте образовалось пониженное давление, например вследствие местного нагревания воздуха, то к этому месту начнет двигаться воздух из мест с повышенным давлением. Сила инерции Кориолиса отклонит движущиеся частички воздуха вправо, создав местный вихрь (рис. 18), а для больших масс воздуха — циклон. Аналогично, в местах с повышенным давлением образуются антициклоны.

Отклонение падающих тел к востоку. Рассмотрим в Северном полушарии тело, падающее вертикально вниз под действием силы тяжести без начальной скорости. Действие силы инерции Кориолиса в этом случае в первом приближении сведется к отклонению падающего тела к востоку. Действительно, если скорость тела $\bar{v}_r$ направлена по вертикали к центру Земли, то ее проекция на плоскость, перпендикулярную оси вращения, направлена к центру этого круга (рис. 19). Ускорение Кориолиса $\bar{a}_k$ соответственно направлено по касательной к параллели на запад, а сила инерции Кориолиса $\bar{\Phi}_k$ — по касательной к параллели на восток. Она вызовет отклонение падающего тела к востоку. Как показывают расчеты, это отклонение при падении с высоты 160 м составляет приблизительно 2,8 см при $\varphi=50^\circ$, что хорошо согласуется с результатами опытов.

Пример. Внутри трубки, имеющей гладкую поверхность, находится шарик массой $m=1$ кг (рис. 20). Шарик притягивается к неподвижной точке O трубки силой, пропорциональной расстоянию шарика до этой точки. Коэффициент пропорциональности $c=4,9$ Н/м. Трубка наклонена к вертикальной оси Oz_1 на угол $\alpha=60^\circ$ и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью $\omega=1$ с $^{-1}$. В начальный момент шарик находился в точке M_0 на расстоянии $M_0O=2,4$ м и имел скорость относительно трубки $v_0=10$ м/с.

Определить закон движения шарика по трубке, принимая его за точку; силу давления шарика на стенку трубки и силу притяжения в момент времени $t=\pi/2$ с.

267

Решение. Выберем систему подвижных осей координат $Oxyz$, вращающихся вместе с трубкой. Ось Ox направим по трубке. Векторное уравнение движения шарика относительно подвижной системы координат имеет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k.$$

В проекциях на подвижные оси координат

$$m\ddot{x} = -F - P \cos \alpha + \Phi_e \sin \alpha;$$

$$0 = N_y - P \sin \alpha - \Phi_e \cos \alpha;$$

$$0 = N_z + \Phi_k.$$

Здесь $\bar{P}=m\bar{g}$ — сила тяжести шарика; $\bar{N}$ — сила реакции трубки; $\bar{F}$ — сила притяжения; Φ_e , Φ_k — переносная сила инерции и сила инерции Кориолиса. Так как $y=\text{const}=0$, $z=\text{const}=0$, то $\ddot{y}=\ddot{z}=0$. Ось Oz направлена параллельно силе Φ_k , а ось Oy вместе с другими осями образует правую систему осей координат.

В рассматриваемом случае

$$\Phi_e = m\omega^2 \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}x; \quad \Phi_k = 2m\omega \dot{x} \sin \alpha = \sqrt{3}\dot{x};$$

$$F = cx = 4,9x; \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя эти значения сначала в общем виде в уравнения движения, после простейших преобразований получаем:

$$\ddot{x} + (c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha)x = -g \cos \alpha; \quad N_y = m \sin \alpha (g + x\omega^2 \cos \alpha); \quad N_z = -2m\omega \dot{x} \sin \alpha.$$

После подстановки числовых значений величин имеем

$$\ddot{x} + 4,1x = -4,9; \quad N_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(9,8 + \frac{x}{2} \right); \quad N_z = -\sqrt{3}\dot{x}.$$

Дифференциальное уравнение является линейным неоднородным; следовательно, его решение

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 — общее решение однородного уравнения; x_2 — частное решение неоднородного уравнения, правая часть которого постоянна. В качестве частного решения можно взять постоянную $x_2 = -4,9/4 = -1,2$. При подстановке значения x_2 в дифференциальное уравнение убеждаемся, что оно обращает уравнение в тождество, т. е. является его частным решением.

Общее решение однородного уравнения x_1 является решением однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + 4,1x_1 = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4,1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} \approx \pm 2i$ чисто мнимые. Следовательно, решение однородного уравнения, зависящее от двух постоянных интегрирования C_1 и C_2 , можно выразить в форме

$$x_1 = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

После этого

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 1,2;$$

$$\dot{x} = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t.$$

268

Начальные условия задачи

$$t = \pi/2c; \quad x = x_0 = -2,4 \text{ м}; \quad \dot{x} = v_0 = 10 \text{ м/с}.$$

Подставляя их в выражения для x и $\dot{x}$, получаем следующие уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$-2,4 = -C_1 - 1,2; \quad 10 = -2C_2.$$

Их решения $C_1 = 1,2$; $C_2 = -5$.

Уравнения движения шарика с учетом значений постоянных принимает вид

$$x = 1,2(\cos 2t - 1) - 5 \sin 2t; \quad \dot{x} = -2,4 \sin 2t - 10 \cos 2t.$$

В момент времени $t = \pi/2$ с

$$x = 1,2(\cos \pi - 1) - 5 \sin \pi = -2,4 \text{ м}; \quad \dot{x} = -2,4 \sin \pi - 10 \cos \pi = 10 \text{ м/с}.$$

Подставляя эти значения x и $\dot{x}$ в выражения для N_y и N_z , имеем

$$N_y = (\sqrt{3}/2)(9,8 - 1,2) = 7,3 \text{ Н}; \quad N_z = -\sqrt{3} \cdot 10 = -17,3 \text{ Н}.$$

Давление шарика N' на трубку равно по величине силе реакции трубки на шарик. Поэтому

$$N' = N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = 18,8 \text{ Н}.$$

Сила притяжения F при $t = \pi/2$ с

$$F = c \cdot |x| = 4,9 \cdot 2,4 = 11,8 \text{ Н}.$$